ENSAYOS ECONOMICOS
Nº 10 - Junio 1979

MEDIDA DE LA DESIGUALDAD EN LA DISTRIBUCION (°)

por Roberto Antelo*

1. INTRODUCCION

El presente trabajo tiene por objeto mostrar un panorama de los problemas que surgen al querer medir la desigualdad en una distribución y varias de las soluciones propuestas. En un Anexo final, se presenta una generalización de estas medidas con miras a lograr una mejor comparación entre ellas.

El hecho de poder medir la desigualdad en una distribución de bienes o recursos (ingresos, consumo de un determinado bien, mano de obra entre las firmas, asignación de recursos a entidades financieras, etc.) ha ido cobrando creciente interés para los economistas. Posiblemente por ello últimamente se han realizado importantes esfuerzos para lograr definir un indicador que refleje con suficiente claridad el grado de desigualdad en la distribución de la variable que se esté analizando. Si bien todas estas contribuciones han sido valiosas, su mayor o me

(°) Trabajo publicado por el Centro de Estudios Monetarios y Bancarios del B.C.R.A. Serie Estudios Técnicos Nº 31. Abril 1978. (*) Centro de Estudios Monetarios y Bancarios.

nor aplicabilidad depende, en última instancia, del concepto que maneje el investigador para apreciar la sensibilidad del indicador que utilice.

La idea de "desigualdad en la distribución" es muy difícil de transcribir a términos matemáticos, salvo en lo que se refiere a los valores extremos. En efecto, resulta obvio que la mínima desigualdad se presentará cuando todos los individuos (firmas, bancos, etc.) reciben la misma cantidad, mientras que la máxima desigualdad corresponde al caso en que uno de aquéllos recibe el total de lo que se distribuye, y los demás, nada.

Una formalización elemental de estas ideas permite, de algún modo, acercarse a la buscada expresión de un indicador de desigualdad.

Básicamente, se dispone de un total Y de cierta variable que se distribuye entre N individuos, representando con y_i lo que recibe cada uno. Con esa información se desea construir un indicador que permita identificar las distintas distribuciones posibles de ese total entre los N individuos. Así, cada conjunto $\{y_i\}_{i=1}^{N}$ de valores posibles, sujetos a la condición:

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = Y \qquad (1.1)$$

representa una distribución posible.

En rigor, lo que se busca es una función de ese conjunto de valores de modo que a cada distribución le asigne un valor distinto que permita clasificarlas en la escala de mínima desigualdad a máxima desigualdad. Esto equivale, matemáticamente, a definir una función desde el espacio de vectores de N dimensiones restringido hacia el conjunto de los números reales. El inconveniente que presentan estas funciones es que siempre habrá vectores que, siendo distintos, producen el mismo valor para la función, dado que el conjunto de partida es de mayor dimensión. Por lo tanto, se hará necesario adoptar un criterio para agrupar los vectores que tengan un mismo valor de la función. Por ejemplo, si N = 2 y se define la función:

$$f\ (y_1,\ y_2) = y_1^2 + y_2^2 \tag{1.2}$$

los vectores (5,0); (4,3) y (3.536,3.536) producirán el mismo valor de la función. En consecuencia, al utilizar el valor de la función para ordenar los vectores por grado de desigualdad, los mencionados en el ejemplo quedarán a un mismo nivel.

Se insiste en este punto ya que, al adoptar un determinado indicador, se está aceptando, implícitamente, una definición de equivalencia entre distintas distribuciones. Debe cuidarse, por lo tanto, que esa definición coincida con el criterio manejado que se aplique en el problema particular.

El otro aspecto es, por supuesto, el concerniente al orden o "ranking" que se logra mediante la aplicación de un determinado indicador, ya que éste debe asignar mayor grado de desigualdad a aquellas distribuciones que por su estructura sean, desde un punto de vista subjetivo, más desiguales. Como ilustración de este punto obsérvese que, de acuerdo con la función definida en (1.2), los tres vectores presentados en el ejemplo serían "igualmente desiguales", lo que no coincide con una apreciación subjetiva. No obstante, si se recuerda la restricción enunciada en (1.1) se notará que los vectores no representan un mismo total. Así, la definición de (1.2), junto con la restricción (1.1), hacen que la función adjudique valores distintos a vectores distintos. Sin embargo, si se pasa a N = 3 esa propiedad deja de ser válida, como se puede verificar con los vectores (4,1,1) y (3,3,0).

Si bien el tema a tratar puede encararse en forma general como el problema estadístico de caracterizar la "concentración" de la distribución de una variable aleatoria, se ha preferido comenzar por un enfoque simplemente empírico a ser generalizado posteriormente.

2. EL COEFICIENTE DE VARIACION

Como se dijo en el párrafo anterior, se parte de la distribución del total de una determinada variable que, para mejor comprensión de lo expuesto, se tomará como representativa de los ingresos de una población.

En la tabla 2.1 se presenta un listado para analizar una distribución; allí figuran los ingresos de una hipotética población de cinco individuos.

Ind. Nº	Ingreso
1	200
2	320
3	240
4	360
5	280

TABLA 2.1

Obsérvese que el primer individuo es el que recibe el menor ingreso y el cuarto, el más favorecido. ¿Cómo medir el grado de desigualdad en la distribución?

Una primera idea podría consistir en considerar la diferencia entre el mayor y el menor; esto es, el rango de variación, que para el ejemplo presentado resulta igual a 160. Sin embargo, basta proponer que en un período posterior varíen los ingresos de los intermedios, manteniéndose iguales los extremos, para que el indicador permanezca constante, pese a que la nueva distribución no sea equivalente a la anterior. Surge de este ejemplo la idea de que debería poder compararse cada ingreso con respecto a un nivel de distribución equitativa. Como ya se mencionó al hablar de los valores extremos, la mínima desigualdad corresponde al caso en que todos reciben un mismo valor. Dado que la condición (1.1) exige que el total sea constante, ese término de comparación estará dado por:

$$\bar{y} = Y/N \tag{2.1}$$

que representa el ingreso per cápita (promedio).

Piénsese ahora que el indicador debe resumir todas las diferencias pero sin considerar el sentido de las mismas. O sea que es tan desigual que un individuo reciba un determinado monto por encima del promedio como que reciba ese monto por debajo. Parecerá indicado, entonces, tomar las diferencias en valor absoluto o bien elevadas al cuadrado.

Relacionado con diferencias en valor absoluto, se ha definido el índice de Kuznets que se verá posteriormente.

Siguiendo la otra alternativa, en cambio, se puede definir:

$$d = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 \tag{2.2}$$

Aplicando a los valores presentados en la tabla 2.1 se obtendría $d = 16.000$.

Supóngase ahora que en una fecha posterior se observan y tabulan nuevamente los ingresos y se obtiene el listado que se reproduce en la tabla 2.2.

Ind. Nº	Ingreso
1	200
2	280
3	280
4	360
5	280

TABLA 2.2

Si se emplea el indicador definido en (2.2) se obtendrá d = 12.800. Como se podía esperar, el valor de d ha disminuido, aunque aún se mantiene alto debido a los valores extremos bastante alejados del promedio.

Tal como fue definido, el indicador alcanza su valor máximo cuando uno de los individuos, sea éste el k-ésimo, recibe todo el ingreso. Esta distribución se puede representar como:

$$y_i = \delta_{ik} \cdot Y \tag{2.3}$$

donde δ_{ik} vale 1 si i=k y cero en cualquier otro caso.

Al aplicar la definición (2.2) al caso presentado en la Tabla 2.2 se obtiene:

$$d = (Y - \bar{y})^2 + (N - 1)\,\bar{y}^2 = (N\,\bar{y} - \bar{y})^2 + (N-1)\bar{y}^2 = N\,(N-1)\bar{y}^2 \tag{2.4}$$

Esta expresión permite observar que el valor máximo depende de $\bar{y}$, lo que dificulta la comparación entre indicadores de distribuciones provenientes de grupos con distintos promedios. Por ello, para homogeneizar el indicador se lo divide por $\bar{y}^2$ pero también por N, obteniendo una forma asimilable a un estadístico más conocido. En efecto, la expresión resultante es:

$$(2.5) \qquad d = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2}{N\,\bar{y}^2}$$

Teniendo en cuenta la expresión del valor máximo obtenido en (2.4) y la corrección indicada en (2.5), el nuevo valor extremo será, en consecuencia, N - 1. Como se advierte, el nuevo máximo sólo depende del tamaño del grupo investigado. Puede argumentarse al respecto que el indicador debería hacerse independiente del tamaño de la muestra analizada. No obstante, tal corrección no parece tan acertada, ya que de algún modo debe poder destacarse el hecho de que es más desigual la distribución en la que se reparte un cierto monto entre 100 individuos adjudicándoselo a uno solo, que otra donde se reparte una suma entre sólo 10 individuos también adjudicándosela a uno solo.

Si se considera que los valores y_i son observaciones de una variable aleatoria con cierta distribución de media μ y varianza σ^2, el indicador definido en (2.5) representa un estimador de la cantidad σ^2/μ^2 que es, por definición, el cuadrado del coeficiente de variación.

Dado que en muchas ocasiones los datos para el análisis se proveen expresados en términos relativos o participaciones en el total, resulta conveniente deducir una expresión alternativa para la indicada en (2.5).

$$(2.6) \qquad d = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2}{N\,\bar{y}^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i^2}{N\,\bar{y}^2} - 2\,\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N\,\bar{y}} + \frac{N\,\bar{y}^2}{N\,\bar{y}^2} =$$

$$= N \sum_{i=1}^{N} z_i^2 - 1$$

donde $z_i = y_i/Y$ es, justamente, la participación en el total.

Ahora bien, si los datos son proporcionados en forma absoluta como se viera en un principio, la conversión de términos absolutos a relativos es inmediata, por lo que se puede adoptar (2.6) para todos los casos.

Una nueva variante se presenta cuando la distribución está dada por sectores en lugar de individuos. En este caso los datos serán proporcionados en una forma similar a la mostrada en la tabla 2.3.

Sector Nº	Fracción de población	Participación en el ingreso
1	0.1	0.5
2	0.4	0.4
3	0.5	0.1

TABLA 2.3

Para adecuar la definición del indicador obtenida en (2.6) se hace necesario introducir cierta notación. Con x_i se denotará la fracción de población representada por el sector i-ésimo; $i = 1, 2, \ldots, m$. Si el total de indi viduos es N por cada sector habrá $N x_i$ individuos cuya participación en el total de ingreso será $z_i/(Nx_i)$. Luego, aplicando la definición dada en (2.6) se obtiene:

$$(2.7) \qquad d = N \sum_{i=1}^{m} (Nx_i) \left(\frac{z_i}{Nx_i}\right)^2 - 1 = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\frac{z_i}{x_i}\right)^2 - 1$$

Con los datos presentados en la tabla 2.3 se obtiene $d = 2.92$.

Nótese que con esta nueva definición el valor mínimo sigue siendo cero (0) cuando el ingreso de cada sector sea proporcional a la fracción de población respectiva, esto es, $z_i = x_i$ para todos los sectores. En cambio, el valor máximo ya no es necesariamente $m - 1$, ya que aquél se alcanza cuando todo el ingreso lo concentra el sector más pequeño. Por lo tanto, el valor máximo será $1/x_{mín} - 1$. En el caso analizado este valor es igual a 9.

Esta nueva extensión en la definición de d permite incluir a la variante anterior como un caso particular donde $x_i = 1/N$ para todo i y $m = N$.

Nótese que la cantidad z_i/x_i que aparece en la expresión (2.7) representa la participación en el ingreso per cápita del sector i, con respecto al ingreso per cápita de toda la población. En efecto:

$$(2.8) \qquad w_i = \frac{z_i}{x_i} = \frac{y_i/Y}{n_i/N} = \frac{y_i/n_i}{Y/N} = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}}$$

Desafortunadamente, como $\Sigma\, w_i \neq 1$, w_i no puede ser tomado como una participación. No obstante, se lo llamará "ingreso per cápita relativo del sector i" (ipcri).

Usando la nueva definición, la (2.7) se transforma en:

$$d = \sum_{i=1}^{m} x_i \, w_i^2 - 1 \tag{2.9}$$

Un aspecto que resulta interesante analizar es el comportamiento del indicador cuando se reúnen dos sectores para formar uno solo. Sean éstos el r-ésimo y el s-ésimo. El nuevo sector tendrá como fracción de población $(x_r + x_s)$ y como ipcr:

$$w = \frac{z_r + Z_s}{x_r + x_s} = \frac{x_r w_r + x_s w_s}{x_r + x_s} = f_r w_r + f_s w_s \tag{2.10}$$

donde:

$$f_r = \frac{x_r}{x_r + x_s} \qquad \text{y} \qquad f_s = \frac{x_s}{x_r + x_s} \tag{2.11}$$

Nótese que a partir de (2.11) se deduce trivialmente que:

$$f_r + f_s = 1 \tag{2.12}$$

La aplicación de la fórmula (2.9) a la nueva distribución donde los sectores r y s se han fundido en uno solo da por resultado:

$$d' = \sum_{i \neq r,s} x_i w_i^2 + (x_r + x_s)\,(f_r w_r + f_s w_s)^2 - 1 \tag{2.13}$$

Restando de la expresión (2.9) la (2.13) se obtiene:

$$(2.14) \quad d' - d = (x_r + x_s)\ (f_r w_r + f_s w_s)^2 - x_r w_r^2 - x_s w_s^2 =$$

$$= (x_r + x_s)\ f_r\ (1 - f_r)\ w_r^2 + 2\ f_r\ f_s\ w_r\ w_s +$$

$$+ f_s\ (1 - f_s)\ w_s^2$$

Pero en virtud de (2.12) resulta finalmente:

$$(2.15) \qquad d' - d = -(x_r + x_s)\ f_r\ f_s\ (w_r - w_s)^2$$

Dado que x_r y x_s y, en consecuencia f_r y f_s, son positivos, la expresión dada en (2.15) será siempre negativa, salvo que $w_r = w_s$. Como podría esperarse, entonces, la asociación de dos sectores disminuirá siempre la desigualdad, salvo que los ipcri sean iguales, caso en el cual el indicador no varía. Si además se escribe:

$$(2.16) \qquad (x_r + x_s)\ f_r\ f_s = \frac{x_r x_s}{x_r + x_s}$$

se halla que (2.16) es máxima para $x_r = x_s$, de lo que se deduce que la disminución de la desigualdad será mayor cuanto menor sea la diferencia entre x_r y x_s, independientemente de los valores de w_r y w_s.

Otro aspecto que resulta importante contemplar es el comportamiento del indicador frente a una transferencia de ingresos de un sector a otro. Sean estos sectores el r-ésimo y el s-ésimo, para los cuales se cumple:

$$(2.17) \qquad w_r < w_s$$

Se establece una transferencia de ingresos (relativa) h desde el sector r hacia el s, de modo que si $h > 0$ la transferencia real se opera desde r hacia s, mientras que si es $h < 0$ se operará en sentido contrario.

La expresión del indicador para la nueva situación será:

$$(2.18) \qquad d' = \sum_{i \neq r,s} x_i w_i^2 + x_r (w_r - h/x_r)^2 + x_s (w_s + h/x_s)^2$$

de modo que al restar (2.11) de (2.18) quedará:

$$(2.19) \qquad d' - d = x_r (w_r - h/x_r)^2 + x_s (w_s + h/x_s)^2 - x_r w_r^2 - x_s w_s^2 =$$

$$= -2 w_r h + h^2/x_r + 2 w_s h + h^2/x_s =$$

$$= 2 (w_s - w_r) h + (1/x_r + 1/x_s) h^2$$

De acuerdo con (2.17) la diferencia $(w_s - w_r)$ es positiva, de modo que si $h > 0$ resulta $d' > d$; como era de esperar, ya que la transferencia se ha operado desde un sector de ipcri menor hacia uno mayor. En cambio si $h < 0$ la expresión (2.19) será negativa mientras que:

$$(2.20) \qquad 0 < h < 2h^*$$

donde:

$$h^* = -\frac{w_s - w_r}{\frac{1}{x_r} + \frac{1}{x_s}} \tag{2.21}$$

y será nuevamente positiva cuando sea $h < 2h^*$.

Para una más clara comprensión de lo expuesto, se adiciona un ejemplo sencillo sobre el cual se hará una posterior interpretación de lo ocurrido.

Sea, entonces, una distribución como la presentada en la tabla 2.4.

TABLA 2.4

x_i	z_i	w_i
0.5	0.2	0.4
0.3	0.6	2.0
0.2	0.2	1.0

A partir de esta tabla, se desarrollan otras seis distribuciones para distintos valores de h, como se puede apreciar en las tablas 2.5 a 2.10. Un resumen de los resultados obtenidos se consigna en la tabla 2.11.

TABLA 2.5

x_i	z_i	w_i
0.5	0.2	0.4
0.3	0.7	2.33
0.2	0.1	0.5

TABLA 2.6

x_i	z_i	w_i
0.5	0.2	0.4
0.3	0.5	1.67
0.2	0.3	1.5

x_i	z_i	w_i
0.5	0.2	0.4
0.3	0.48	1.6
0.2	0.32	1.6

TABLA 2.7

x_i	z_i	w_i
0.5	0.2	0.4
0.3	0.4	1.33
0.2	0.4	2.0

TABLA 2.8

x_i	z_i	w_i
0.5	0.2	0.4
0.3	0.36	1.2
0.2	0.44	2.2

TABLA 2.9

x_i	z_i	w_i
0.5	0.2	0.4
0.3	0.3	1.0
0.2	0.5	2.5

TABLA 2.10

Tabla	h	w_2	w_3	d
2.4	0	2.0	1.0	0.48
2.5	0.1	2.33	0.5	0.758
2.6	-0.1	1.67	1.5	0.36
2.7	-0.12	1.6	1.6	0.36
2.8	-0.2	1.33	2.0	0.413
2.9	-0.24	1.2	2.2	0.48
2.10	-0.3	1.0	2.5	0.63

TABLA 2.11

La primera verificación corresponde al hecho de que una transferencia en el sentido de los ipcri crecientes aumenta la desigualdad, como en la tabla 2.5.

A través de los resultados de las tablas 2.6 y 2.7 se observa que la transferencia en el sentido de los ipcri decrecientes disminuye la desigualdad hasta que se llega a $w_r = w_s$, donde se alcanza un mínimo relativo (absoluto bajo la condición de todos los otros w_i constantes). Nótese que la condición $w_r = w_s$ es equivalente a:

$$h = h^* \tag{2.22}$$

donde h^* es el definido en (2.21).

Luego -obsérvense tablas 2.8 y 2.9- el valor del indicador comienza a crecer con respecto al anterior, ya que se están transfiriendo ingresos de menor a mayor ipcri, aunque con respecto a la situación original siga siendo menor hasta que alcanza el valor inicial, como se ve en la tabla 2.9. Este caso corresponde al límite $h = 2h^*$. A partir de allí, el indicador siempre crecerá (tabla 2.10) aun por sobre el valor inicial.

Dos aspectos importa destacar a partir del análisis realizado anteriormente. En primer lugar, nótese que las situaciones ilustradas en las tablas 2.4 y 2.9 presentan la misma desigualdad, a juzgar por el valor del indicador en ambos casos. Aunque aparentemente la observación de las respectivas tablas no permitiría llegar a tal conclusión, debe recordarse que los términos de comparación son $x_i\, w_i^2$ y no simplemente los w_i.

En segundo lugar, importa destacar que no toda transferencia de sectores de menor a mayor ipcri resulta en una menor desigualdad. En efecto, para transferencias más allá del límite establecido se consigue el efecto contrario. Por supuesto, el óptimo se logrará tomando $h = h^*$, esto es, $w_r = w_s$.

Un nuevo aspecto se presenta cuando los sectores están constituidos por subsectores. En estos casos, siguiendo la terminología estadística se habla de "desigualdad dentro de sectores" y de "desigualdad entre sectores". Por eso, una propiedad deseada para el indicador que se defina, consiste en la posibilidad de descomponerlo en dos factores que representen, respectivamente, a los términos antes mencionados. Para mostrar que el indicador actualmente analizado presenta esa propiedad es conveniente introducir una nueva notación.

El problema indicado se plantea en la siguiente forma: se dispone de m sectores y, dentro de cada uno de ellos, se tienen n_i subsectores.

Con x_{ij} se identificará la fracción de población representada por el subsector j del sector i y con z_{ij} se identificará la participación en el ingreso del subsector j del sector i. A base de ellos se definen:

(2.23) $$x_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

la fracción de población representada por el sector i.

(2.24) $$z_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}$$

la participación en el ingreso del sector i.

(2.25) $$u_{ij} = x_{ij}/x_{i.}$$

la fracción de población representada por el subsector j del sector i dentro de su sector.

(2.26) $$v_{ij} = z_{ij}/z_{i.}$$

la participación en el ingreso del subsector j del sector i dentro de su sector.

(2.27) $$w_{ij} = v_{ij}/u_{ij}$$

el ingreso per cápita relativo del subsector j del sector i, que se puede denominar como ipcrij.

(2.28) $$w_{i.} = z_{i.}/x_{i.}$$

el ingreso per cápita relativo (al total) del sector i, que se identificará como ipcri. Adviértase que en esta particular definición el subíndice i. no representa suma sobre j, ya que los valores per cápita (por razón de dos variables) no resultan aditivos; esto es, $w_{i.} \neq \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}$.

Sin embargo, se ha preferido esta notación debido a la asociación creada entre w y el cociente entre z y x.

Con la notación descripta precedentemente se puede definir un indicador de desigualdad para cada sector adaptando la expresión (2.11) para obtener:

(2.29) $$d_i = \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}\, w_{ij}^2 - 1$$

Si ahora se extiende la definición para todos los sectores se tendrá:

$$(2.30) \qquad d = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \left(\frac{z_{ij}}{x_{ij}}\right)^2 - 1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_{i.} \left(\frac{z_{i.}}{x_{i.}}\right)^2 \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij} \left(\frac{v_{ij}}{u_{ij}}\right)^2 - 1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (x_{i.}\ w_{i.}^2)\ d_i + \left(\sum_{i=1}^{m} x_{i.}\ w_{i.}^2 - 1\right)$$

Se ha logrado, como se puede ver en la expresión (2.30), descomponer d en dos factores. El primero representa una suma ponderada de los indicadores de desigualdad dentro de cada sector, tal como se los definió en (2.29). El segundo término, entre paréntesis, muestra la desigualdad entre los sectores y será denotado como d_0. La objeción que puede presentarse a esta descomposición, tal como lo puntualiza Theil (ver Theil (1967)), es que la suma de los ponderadores incluidos en el primer factor no es una constante, ya que es igual a $d_0 + 1$ y dependerá, por lo tanto, de la desigualdad entre sectores.

En la tabla 2.12 se ilustra un caso como el analizado últimamente. Allí se han listado los ingresos por subsector provenientes de una hipotética distribución.

Sobre la base de esos datos se confeccionó la tabla 2.13, donde se consignan los valores necesarios para el cálculo indicado en la expresión (2.30).

Sectores	Subsectores	Fracción de población	Participación en el ingreso
ALTOS	Propietarios	0.03	0.08
	Dependientes	0.06	0.12
MEDIOS	Profesionales	0.06	0.09
	Dependientes	0.18	0.20
	Independientes	0.12	0.12
BAJOS	Independientes	0.20	0.16
	Asalariados	0.35	0.23

TABLA 2.12

i	j	x_{ij}	$x_{i.}$	u_{ij}	z_{ij}	$z_{i.}$	v_{ij}	w_{ij}	$w_{i.}$	$x_{i.}\, w_{i.}^2$	d_i
1	1	0.03	0.09	0.33	0.08	0.20	0.40	1.20	2.22	0.443	0.0198
	2	0.06		0.67	0.12		0.60	0.90			
2	1	0.06	0.36	0.17	0.09	0.41	0.22	1.32	1.14	0.467	0.0320
	2	0.18		0.50	0.20		0.49	0.98			
	3	0.12		0.33	0.12		0.29	0.88			
3	1	0.20	0.55	0.36	0.16	0.39	0.41	1.14	0.71	0.277	0.0096
	2	0.35		0.64	0.23		0.59	0.92			
									d_0	0.187	
									d		0.2134

TABLA 2.13

3. OTRAS MEDIDAS

Muchos tipos de indicadores han sido sugeridos a lo largo del tiempo y a través de diversos autores. No obstante, el uso y la aplicación a problemas particulares han determinado que sobrevivan sólo algunos de ellos. El cuadrado del coeficiente de variación, analizado en el punto anterior, se eligió por considerar que surge como consecuencia natural del planteo de medir la desigualdad en la distribución. Junto con él, otras medidas usuales son el coeficiente de concentración de Gini y el indicador de entropía (de Theil). En un trabajo de aplicación de Weiskoff (1974) se señalan como medidas tradicionales los mencionados indicadores de Gini y el coeficiente de variación, pero agregando el indicador de Kuznets y las participaciones ordinales en el ingreso, consignando algunas críticas con respecto a cada indicador.

Tinbergen, por su parte (ver Tinbergen (1975)), utiliza la razón entre deciles o quintiles extremos, los desvíos en valor absoluto de cada participación con respecto al promedio, una suerte de variante del coeficiente de variación; el coeficiente de Gini (que llama R y define en una forma más cercana a los economistas) y el porcentaje máximo de nivelación, que es el porcentaje del ingreso total que debe ser transferido de los más ricos a los más pobres a fin de lograr la igualdad, utilizado junto con el coeficiente de Gini en un extenso trabajo de Paukert (1973).

A estas medidas cabría agregar el indicador de Atkinson, corregido posteriormente por Allingham, que será analizado más adelante.

El coeficiente de Kuznets, tal cual aparece definido en Jain (1975), es el promedio aritmético de los desvíos en valor absoluto, con respecto a 0.05, de la participación en el ingreso de cada vigesil de población. Este indicador puede ser generalizado a cualquier 1/N-il para dar:

$$(3.1) \qquad K(z) = \sum_{i=1}^{N} \left| z_i - \frac{1}{N} \right|$$

Si se conviene en tomar los z_i ordenados de mayor a menor y se define r como el índice del último z_i que supera $1/N$, la (3.1) se puede reescribir como:

$$(3.2) \quad K(z) = \sum_{i=1}^{r} \left(z_i - \frac{1}{N}\right) + \sum_{i=r+1}^{N} \left(\frac{1}{N} - z_i\right) = 2 \sum_{i=1}^{r} z_i - 2\,\frac{r}{N}$$

Nótese que este indicador, de acuerdo con (3.2), tomará el mismo valor para todas aquellas distribuciones que mantengan constante la suma de las participaciones mayores que $1/N$.

El índice de concentración de Gini, muy difundido entre los economistas, representa -en una distribución de ingresos- el coeficiente del área encerrada por la bisectriz del primer cuadrante y la curva de Lorentz dividida por el área del triángulo bajo la bisectriz. Sin embargo, con miras a obtener una expresión adecuada se ha preferido la forma utilizada por Pyatt (1976) que es la siguiente:

$$(3.3) \qquad G = \frac{\dfrac{1}{2N^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left| y_i - y_j \right|}{\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} y_i}$$

para una distribución $\{y_i\}_{i=1}^{N}$

Un gran inconveniente para este indicador, como para los que se analizarán posteriormente, reside en su falta de discriminación; esto es, que para muchas distribuciones que intuitivamente parecerían completamente distintas, el indicador toma el mismo valor.

Para verlo, conviene adoptar la convención de reordenar los conjuntos que representan las distintas distribuciones de modo que $y_i \geq y_j$ si $i < j$. Con esta convención la (3.3) se puede escribir como:

$$G = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} i\, z_i - \left(1 + \frac{1}{N}\right) \qquad (3.4)$$

La expresión (3.4) permite inferir que, para las distribuciones de igual N e Y, el indicador considerará iguales a todas aquéllas que tengan igual el término $\sum_{i=1}^{N} i\, y_i$.

Para ilustrar esta conclusión en la tabla 3.1 se presentan distintas distribuciones de un mismo total Y que verifican producir un mismo valor de G. En la última columna se ha adicionado el valor de d para poder comparar el comportamiento de ambos indicadores.

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	G	d
11	10	6	2	1	11.2	0.456
12	10	2	2	2	11.2	0.422
10	10	8	2	0	11.2	0.489
12	8	6	4	0	11.2	0.444
11	10	5	4	0	11.2	0.456

TABLA 3.1

El indicador de entropía analizado en extenso por Theil (1969) tiene comportamiento y propiedades similares al cuadrado del coeficiente de variación. Su expresión es la siguiente:

$$(3.5) \qquad T(z) = \sum_{i=1}^{N} z_i \log N z_i$$

donde z_i es, como ya se convino, la participación en el ingreso, y log representa los logaritmos naturales.

La buscada propiedad de poder ser descompuesto en dos factores cuando los sectores contienen subsectores no es tan evidente a partir de la expresión (3.5), pero, siguiendo el desarrollo dado por Theil, se llega a:

$$(3.6) \qquad T(w) = \sum_{i=1}^{m} z_{i.}\, T_{i.}(w) + \sum_{i=1}^{m} z_{i.} \log w_{i.}$$

con $T_i(w) = \sum_{i=1}^{n_i} v_{ij} \log w_{ij}$ y la notación es la misma utilizada para (2.28).

La ventaja de la expresión (3.6) con respecto a la lograda en (2.28) reside, como lo destaca Theil, en que los ponderadores en el término correspondiente a la desigualdad dentro de sectores, $-z_{i.}-$ suman uno, siendo, por lo tanto, independientes del otro término.

El indicador de Atkinson responde, por su parte, a un enfoque de medir el "bienestar social" y tiene la forma:

$$(3.7) \qquad I = 1 - \{ \sum_i (\frac{y_i}{\mu})^{1-e} f(y_i) \}^{\frac{1}{1-e}}$$

donde se supone que $\{y_i\}$ es una muestra proveniente de una distribución con media μ y de frecuencia relativa $f(y_i)$. Para el caso más simple contemplado al principio se tiene que $\mu = \bar{y}$ y $f(y_i) = 1/N$, de modo que al reemplazar en (3.6) se obtiene:

$$(3.8) \qquad I = 1 - N \left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} z_i^{(1-e)}\right\}^{\frac{1}{1-e}}$$

El coeficiente e es el llamado "grado de aversión a la desigualdad" y, según el valor que se le asigne, el indicador tendrá sensibilidad a distintos aspectos. Así, por ejemplo, a medida que e crece se les dará mayor peso a las transferencias en el más bajo nivel de la distribución. Más detalles pueden ser consultados en Atkinson (1970), y una corrección del mismo, en Allingham (1972).

4. COMPARACION ENTRE LOS INDICADORES

En lo que respecta a la comparación entre los distintos indicadores analizados es importante mencionar el trabajo de Champernowne (1974) donde realizó un estudio comparativo entre los indicadores mencionados, aunque desde una óptica muy particular, ya que se ocupa de contemplar tres aspectos: desigualdad debida a un extremado bienestar relativo, desigualdad entre los ingresos menos extremos y desigualdad debida a la extremada pobreza. El análisis procede a través de la simulación de diferentes distribuciones para comparar el comportamiento de los diversos indicadores para cada uno de los aspectos antes señalados.

Como una de las aplicaciones posibles de estas medidas consiste en comparar la distribución de un mismo ingreso en diferentes oportunidades, parecería adecuado poder establecer la sensibilidad del indicador frente a las transferencias de ingresos de un individuo a otro. Esto sería una generalización del aspecto analizado en el punto 2, pág. 9.

Para ello se define la sensibilidad del indicador como:

$$(4.1) \quad S(I) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \{I\,(y_1, y_2, \ldots, y_r - h, \ldots, y_s + h, \ldots, y_N) - I(y_1, y_2, \ldots, y_r, \ldots, y_s, \ldots, y_N)\}$$

donde I representa genéricamente un indicador. Como se ve, la sensibilidad dependerá de los sectores r y s, de modo que, en general, no será uniforme.

Para el indicador d se tiene:

$$(4.2) \qquad d^* = \frac{N}{Y^2} \sum_{i \neq r,s} y_i^2 + (y_r - h)^2 + (y_s + h)^2$$

De modo que, al aplicar la expresión (4.1), se llega a:

$$(4.3) \quad S(d) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \{\frac{N}{Y^2} (-2\,h\,y_r + h^2 + 2\,h\,y_s + h^2)\} =$$

$$= \frac{N}{Y^2} (y_s - y_r)$$

De la expresión (4.3) se deduce que si la transferencia ocurre entre individuos con el mismo ingreso, el indicador es insensible frente a transferencias muy pequeñas. Además, a medida que aumenta la diferencia entre los ingresos, la sensibilidad es mayor.

Para el caso del indicador de Gini, conviene utilizar la expresión deducida en (3.4) para obtener:

$$(4.4) \quad G^{*} = \frac{1}{N} \{ N + 1 - \frac{2}{Y} \sum_{i \neq r,s} i\, y_i - \frac{2}{Y} \left| r\,(y_r - h) + s\,(y_s - h) \right| \}$$

Por lo tanto:

$$(4.5) \qquad S(G) = \frac{2}{Y}\,(r - s)$$

Si bien la expresión obtenida es muy similar a la de la sensibilidad de d, la diferencia estriba en que en (4.5) solo aparecen los índices de los individuos y no su ingreso. O sea que la variación del indicador frente a variaciones muy pequeñas del ingreso depende solo de la posición relativa de los individuos dentro del rango de ingresos, independientemente de la magnitud de éstos.

Por otra parte, aplicando un razonamiento similar al utilizado en los casos anteriores, se obtiene para el indicador de Theil:

$$(4.6) \qquad S(T) = \frac{y_r + y_s}{Y} + \frac{1}{Y} \log \frac{y_s}{y_r}$$

Finalmente, para el indicador de Atkinson dado en la expresión (3.8) se obtiene:

$$(4.7) \qquad S(I) = N \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{1-e}} (1 - e)\, Y^{e}\, (y_s^{-e} - y_r^{-e})$$

Con miras a lograr resultados más generales se puede, como ya se comentó, dar al tema de la desigualdad en la distribución un enfoque estadístico. Para ello, se considera el conjunto $\{y_i\}_{i=1}^{N}$ representativo de la distribución como una muestra proveniente de una cierta variable aleatoria con función de densidad $f(y)$ o de cuantía $f(y_i)$ según corresponda.

La variable Y generalmente tiene un rango de variación $(0,y^*)$ donde y^* puede ser suficientemente grande pero no infinito. Ahora cada distribución posible es, en realidad, una función f, de modo que la familia de distribuciones será una familia de funciones.

Así por ejemplo, el caso de "máxima igualdad" estará definido, para el caso discreto, como:

(4.8) $$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y = \mu \\ 0, & \text{si } y \neq \mu \end{cases}$$

donde $\mu = \sum_i y_i \, f(y_i)$.

Para el cálculo de d hay que tener en cuenta que la definición dada en (2.6) se refería a un estimador muestral, mientras que ahora se conoce la distribución teórica, por lo que se puede calcular directamente a partir de μ y σ^2. Para ello basta evaluar:

(4.9) $$\sigma^2 = \sum_i y_i^2 \, f(y_i) - \mu^2 = 0$$

Y, en consecuencia, $d^* = \sigma^2/\mu^2 = 0$.

Una distribución que represente la máxima desigualdad puede estar dada por la siguiente:

(4.10) $$f(y) = \begin{cases} a, & \text{si } y = y^* \\ 1-a, & \text{si } y = 0 \end{cases}, \text{ con } a \to 0.$$

Para este caso se tiene que $\mu = a\,y^*$; $\sigma^2 = \{a\,(1-a)y^*\}^2$ y, por lo tanto:

(4.11) $$d^* = (1 - a)/a$$

Nótese que si en (4.11) se toma $a = 1/N$ se obtiene para d^* el valor máximo hallado en el punto 2.

Gastwirth (1975) utiliza una generalización de la expresión dada para el cuadrado del coeficiente de variación basándose en una medida generalizada de dispersión. Así, si $h(y)$ es una función convexa con $h(0) = 0$ y $f(y)$ es la función de densidad para la cual se quiere medir la dispersión según h, esa medida estará dada por:

(4.12) $$D(h) = \int h(y)\ f(y)\ dy - h(\mu)$$

La medida presentada por Gastwirth tiene la forma:

(4.13) $$M(h) = D(h)/h(\mu)$$

Nótese que cualquiera sea $h(y)$ si $f(y)$ es la función definida en (4.8) se obtendrá $D(h) = 0$. Por el contrario, el valor máximo depende de la forma funcional de h. En efecto, aplicando (4.13) a la función definida en (4.10) se obtiene:

(4.14) $$M(h) = \frac{a\ h\ (y^*)}{h\ (a\ y^*)} - 1$$

Es interesante notar que si se elige $h(y) = y^2$ la expresión (4.13) se convierte en el cuadrado del coeficiente de variación y si se toma $h(y) = y \log y$, la medida $M(h)$ se transforma en el indicador de Theil, dividido por $\log \mu$.

5. CONCLUSIONES

A través del análisis de los cinco indicadores seleccionados y de los antecedentes en la literatura comentados se puede concluir que no existe realmente un indicador óptimo. Además, como ya se dijo e ilustró con ejemplos numéricos, los indicadores presentan el grave inconveniente de generar clases de equivalencia, esto es, conjuntos de distribuciones con igual valor del indicador para los cuales el investigador no ha previsto considerar iguales. El otro problema que se plantea es el hecho de que los indicadores no produzcan el mismo "ranking", de modo que al desplazarse de una distribución hacia otra algunos indicadores disminuirán mientras que otros aumentan. Por lo tanto, puede ser aconsejable utilizar simultáneamente varios indicadores, interpretando cada uno en su contexto. No obstante, se proseguirá investigando con miras a obtener una formulación matemática que permita enfocar el problema de los indicadores en forma global.

Referencias Bibliográficas

/1/ ALLINGHAM, M.G. (1972): "The measurement of inequality", Journal of economic theory, 5, p. 163/9.

/2/ ATKINSON, A.B. (1970): "On the measurement of inequality", Journal of economic theory, 2, p. 244/63.

/3/ CHAMPERNOWNE, D.G. (1974): "A comparison of measures of inequality of income distribution", Economic Journal, 84, p. 787/816.

/4/ GASTWIRTH, J.L. (1975): "The estimation of a family of measures of economic inequality", Journal of econometrics, 3, p. 61/70.

/5/ JAIN, S. (1975): "Size distribution of income", World Bank Publication.

/6/ PAUKERT, F. (1973): "Distribución del ingreso en diferentes niveles de desarrollo", Revista Internacional del Trabajo, 88, Nros. 2-3, p. 107/39.

/7/ PYATT, G. (1976): "On the interpretation and disaggregation of Gini coefficients", The Economic Journal, 86, p. 253/55.

/8/ THEIL, H. (1967): "Economics and information theory", North Holland.

/9/ TINBERGEN, J. (1975): "Income distribution", North Holland.

/10/ WEISKOFF, R. (1974): "Distribución del ingreso y crecimiento económico en Puerto Rico, Argentina y México", Distribución del Ingreso, Fondo de Cultura Económica, p. 111/47.